

自适应的图像组合降噪

周登文 申晓留

(华北电力大学计算机科学与技术系, 北京 102206)

摘要 BayesShrink 是小波收缩降噪最好的算法之一, 而 WienerChop 方法则是利用小波域维纳滤波改进了 VisuShrink 算法。为了更好地滤除噪声, 研究了 WienerChop 组合 BayesShrink 进行降噪的方法。实验表明, 该组合算法优于 WienerChop 和 BayesShrink 算法, 其可产生更低的均方误差和更高的信噪比。它不仅综合了 WienerChop 和 BayesShrink 两种算法的优点, 而且改善了 WienerChop 算法的过光滑和 BayesShrink 算法残留较多噪声的问题, 同时可获得视觉上更为愉悦的降噪图像。

关键词 自适应 图像降噪 图像恢复 小波

中图分类号: TP391.41 TN911.73 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2008)02-0219-06

Adaptive Combined Image Denoising

ZHOU Deng-wen, SHEN Xiao-liu

(Department of Computer Science and Technology, North China Electric Power University, Beijing 102206)

Abstract BayesShrink is one of the best algorithms for wavelet thresholding denoising while WienerChop improves VisuShrink by Wiener filtering in wavelet domain. We studied the denoising method uniting BayesShrink and WienerChop. The combined algorithm has smaller mean squared error (MSE) and higher signal to noise ratio (SNR) than BayesShrink or WienerChop. It integrates the advantages of the two algorithms and improves the problems which images are smoothed overly by WienerChop and BayesShrink retains some noise artifacts. It can visually obtain more pleasing denoised images.

Keywords adaptive method image denoising image restoration wavelet thresholding

1 引言

图像在获取或传输过程中, 常常污染有噪声, 在对图像做进一步处理之前, 必须去除或减少这些噪声。数字图像通常可表示为一个 2 维的灰度矩阵, 矩阵中的每一个元素值 $u(i, j)$ 表示屏幕上像素点的灰度或亮度, 而矩阵中的元素位置 (i, j) 对应屏幕上像素点的位置。由于大多数图像噪声造型为加高斯白噪声, 所以图像降噪问题可以描述为: 观察数据 $Y_{i, j}$ 为信号 $X_{i, j}$ 与噪声 $\varepsilon_{i, j}$ 的叠加, 即

$$Y_{i, j} = X_{i, j} + \varepsilon_{i, j} \quad i=1, \dots, I, \quad j=1, \dots, J \quad (1)$$

其中, $\{\varepsilon_{i, j}\}$ 独立于信号, 且是独立恒等分布 (iid) 的高斯随机变量, 即 $\varepsilon_{i, j} \sim N(0, \sigma^2)$, σ^2 是噪声的方差。

本文的目标是要基于 $Y_{i, j}$ 找到 $X_{i, j}$ 的最优估计, 而测度最优估计的客观准则是最小均方误差 (MSE)。

去除高斯噪声的传统方法是基于线性滤波的去噪方法, 例如空间域滤波方法有均值滤波、高斯滤波。维纳方法也是一种线性滤波, 它是基于傅里叶变换在频率域滤波。在线性滤波方法中, 维纳滤波是最优的^[1]。

Donoho 和 Johnstone 开创了基于小波收缩或取阈值的非线性降噪方法, 称之为 VisuShrink 方法^[2], 并证明在极小极大化均方误差意义上, VisuShrink 方法具有几乎最优的性质, 用其逼近 Besov 空间函数比线性方法具有更好的收敛率。虽然 VisuShrink 方法简单有效, 但是, 存在的问题是会过度光滑图像, 使降噪后的图像没有清晰的边。为了克服

收稿日期: 2006-08-13 改回日期: 2006-09-25

第一作者简介: 周登文 (1965~), 男, 华北电力大学计算机科学与技术系副教授。主要研究方向为图像降噪和图像压缩。E-mail: zdw@ncepu.edu.cn

VisuShrink方法的缺陷,小波收缩方法得到了广泛和深入的研究,已出现了大量的新的小波收缩方法。其中在基于抽样的正交小波变换中,SureShrink方法^[3]和 BayesShrink方法^[4]是最优的^[5]。与 SureShrink和 BayesShrink方法不同,Ghael等人构造了小波域维纳滤波器^[6],称之为 WienerChop方法,它将 VisuShrink方法用于真实信号的估计,WienerChop方法胜出了许多小波收缩的方法。本文中通过研究组合 WienerChop方法和 BayesShrink或 SureShrink方法发现,这种组合方法优于上述的任何一种去噪方法。

2 小波收缩降噪

小波收缩降噪的基本思想是:将有噪图像数据作小波变换,并将大的变换系数对应到信号,小的变换系数对应到噪声。假定式(1)中的观察数据、无噪信号数据和噪声分别用矩阵 \mathbf{Y} , \mathbf{X} 和 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 表示, \mathbf{W} 表示正交小波变换矩阵,且 $\mathbf{w} = \mathbf{W}\mathbf{Y}$, $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{W}\mathbf{X}$, $\mathbf{z} = \mathbf{W}\boldsymbol{\varepsilon}$ 则小波降噪过程分为以下 3 步:

- (1) 计算小波系数矩阵 \mathbf{w} ;
- (2) 将对 \mathbf{w} 细节系数取的阈值作为 \mathbf{X} 的小波系数估计 $\hat{\mathbf{w}}$;
- (3) 对取阈值后的系数进行逆变换,即可获得降噪后的信号数据估计 $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{W}^{-1}\hat{\mathbf{w}}$ 。

本文使用均方误差评估降噪性能。对于 $X(i, j)$ 的降噪估计 $\hat{X}(i, j)$, 均方误差 (MSE) 定义为

$$MSE = \frac{1}{IJ} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (X(i, j) - \hat{X}(i, j))^2 \quad (2)$$

在上述 3 个步骤中,第 1 步和第 3 步是平凡的,关键是第 2 步,因为它涉及到阈值如何选取和对小波系数如何收缩两个问题,也就是选择怎样的收缩函数。通常有两种常用的收缩函数,其中软收缩函数 $\hat{\xi}_\lambda(w) = \text{sgn}(w) \cdot \max(|w| - \lambda, 0)$ 将绝对值比阈值大的系数向零收缩;而硬收缩函数 $\hat{\xi}_\lambda(w) = w \cdot \mathbf{1}_{\{|w| > \lambda\}}$ 则保留绝对值比阈值大的系数,而将绝对值比阈值小的系数设置为零。由于硬收缩函数不连续,其不仅具有更大的方差,并且不够稳定,即对数据变化敏感,因此,软收缩函数是优选的^[2]。

VisuShrink阈值为 $\lambda = \sigma \sqrt{2 \log(M)}$, 它被称之为 universal 阈值, M 是式(1)中 I 和 J 中的较大者。本文处理 $I \times I$ 大小的图像,取 $\lambda = \sigma \sqrt{2 \log(I)}$, 其中 σ 是估计的噪声标准差。实际上,这个阈值偏

大, VisuShrink方法将这个阈值应用到小波各个分解尺度的细节子带,其虽然能够压抑噪声,但是也导致图像的过度光滑。为了保持更多的图像特征,由数据驱动的自适应的阈值选择是必要的。SureShrink阈值是数据驱动的。它是使用软收缩函数,通过最小化 Stein 的无偏风险估计来导出多个分解子带的阈值^[3]。假定 $\mathbf{w}_s = \{w_n; n=1, \dots, N_s\}$ 表示第 s 个子带的细节系数,且噪声方差为 1, 则该子带的 SureShrink 阈值为

$$\lambda_s^S = \arg \min_{\lambda > 0} SURE^S(\lambda; \mathbf{w}_s) \quad (3)$$

其中

$$SURE^S(\lambda; \mathbf{w}_s) = N_s + \sum_{n=1}^{N_s} [m \text{ in}(|w_n|, \lambda)]^2 - 2[\# \text{ of } w_n: |w_n| \leq \lambda]$$

如果噪声方差不为 1, 则要首先估计噪声方差,并将观察数据 \mathbf{Y} 规范化,使其方差为 1。BayesShrink 阈值也是用数据驱动的,它是假定子带小波系数服从广义高斯分布 (GGD), 并使用软收缩函数通过最小化贝叶斯风险导出阈值^[4]。第 s 个子带的 BayesShrink 阈值为

$$\lambda_s^B = \frac{\sigma^2}{\sigma_X} \quad (4)$$

σ^2 是估计的噪声方差, σ_X^2 是考虑的子带上的信号方差。信号标准差 $\sigma_X = \sqrt{\max(\sigma_Y^2 - \sigma^2, 0)}$, 其中 $\sigma_Y^2 = \frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_s} w_n^2$ 是观察数据 \mathbf{Y} 的变换系数在该子带上的方差估计。如果 $\sigma^2 \geq \sigma_Y^2$, 则阈值 $\lambda_s^B = \max(|w_n|)$ 。

在计算任一阈值之前,都要涉及到噪声标准差的估计问题。其可以用最精细分解层的对角子带系数绝对值的中值来估计,因为该子带的系数基本上都是噪声^[2,3]:

$$\sigma = \frac{\text{median}(|\mathbf{w}_s|)}{0.6745} \quad (5)$$

3 WienerChop 方法

小波收缩估计只是在极小极大化均方误差意义上渐近最优的^[2], 然而,对于有限长度的信号来说,使均方误差最小的最优滤波器是维纳滤波器^[6]。如前所述,假定真正的小波系数为 $\boldsymbol{\theta}$ 噪声方差为 σ , 则维纳滤波器^[1,6]为

$$h_w(i, j) = \frac{\hat{\theta}^2(i, j)}{\hat{\theta}^2(i, j) + \sigma^2} \quad (6)$$

其中, $i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J$ 。

由于 σ 和 $\theta(i, j)$ 均是未知的, 因此需要进行估计。 σ 可用式 (5) 估计, WienerChop 滤波采用 VisuShrink 硬收缩函数来估计 $\theta(i, j)$, WienerChop 滤波过程如图 1 所示。

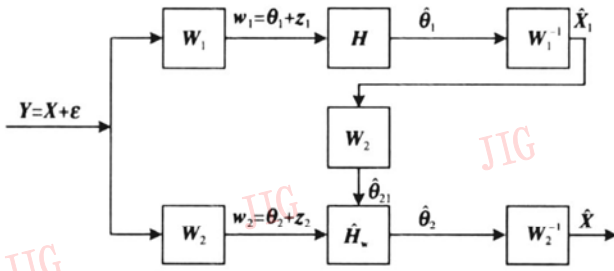


图 1 WienerChop 滤波过程

Fig 1 WienerChop filtering process

在上面的路径中, 变换 W_1 用于生成信号 X 的估计 \hat{X}_1 , H 是与硬收缩函数对应的滤波器。变换 W_2 作用于 \hat{X}_1 , 即可得到系数 $\hat{\theta}_{21}(i, j)$, 其可作为真正的小波系数 $\theta(i, j)$ 的估计, 根据式 (6) 便可得到经验的维纳滤波器

$$\hat{h}_w(i, j) = \frac{\hat{\theta}_{21}^2(i, j)}{\hat{\theta}_{21}^2(i, j) + \sigma^2} \quad (7)$$

其中, $i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J$ 。

再通过下面的路径对观察数据 Y 进行 W_2 变换、 \hat{H}_w 滤波和 W_2^{-1} 反变换, 便可得到真正信号 X 的估计 \hat{X} 。WienerChop 方法要求变换 W_1 和 W_2 不能相同。

WienerChop 滤波之所以胜出了许多小波收缩方法, 它可以解释为: 由于小波系数取阈值只保留了大的小波系数, 而比阈值小的信号系数均收缩为零, 因此造成了次最优的结果。由于 WienerChop 方法通过变换 W_1 和 W_2 的不匹配, 有效地伸展了较小的信号系数, 即带回了部分小的不确定的信号系数, 从而改进了估计性能^[6]。

4 自适应的组合降噪

大家知道, WienerChop 方法利用 VisuShrink 方法, 改进了小波域维纳滤波方法, 提高了估计性能。VisuShrink 方法被用于先导估计真正的信号, 以便生成维纳滤波器。很显然, 如果真正信号的估计越精确, 则维纳滤波效果应该越好。大家也知道,

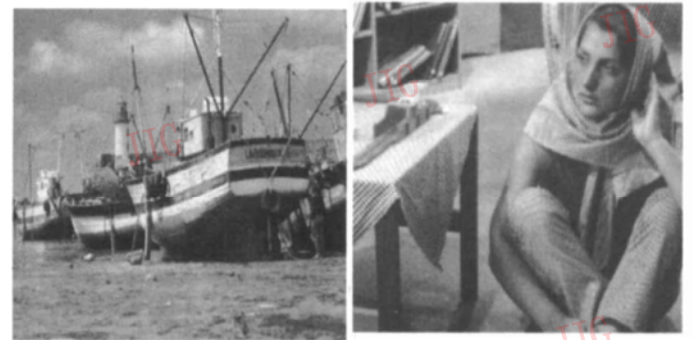
SureShrink 和 BayesShrink 方法比 VisuShrink 方法估计效果更好。一个很自然的问题是: 能不能将 WienerChop 和 BayesShrink 或 SureShrink 组合起来, 产生更好的降噪效果呢? 答案是肯定的。

为验证本文方法的降噪效果, 对一组 512×512 大小的标准测试图像 Lena、Goldhill、Boats 和 Barbara 用前述的方法进行了降噪处理效果比较。它们污染的高斯噪声标准差分别为 1Q、2Q、3Q 和 6Q 原图像如图 2 所示。



(a) Lena 图像

(b) Goldhill 图像



(c) Boats 图像

(d) Barbara 图像

图 2 原图像

Fig 2 Original images

本文采用的衡量去噪效果的客观标准是均方误差, 各种方法针对不同的图像和噪声方差进行降噪, 得到的均方误差列在表 1 中, 最小的均方误差被加粗表示。

表 1 中列出了 7 种方法去噪效果的比较, Wiener 即基于傅里叶变换的经典的维纳滤波方法, 是用 Matlab 图像处理工具箱 Wiener2 命令缺省的设置 (3×3 的局部窗口尺寸) 实现的; Visu-S 即 VisuShrink 方法, Sure-S 即 SureShrink 方法, Bayes-S 即 BayesShrink 方法, Wiener-C 即 WienerChop 方法, Wiener-S 即 WienerChop 组合 SureShrink 方法, Wiener-B 即 WienerChop 组合 BayesShrink 方法; 所有小波变换使用 4 个分解层, Visu-S、Sure-S、Bayes-S

表 1 7种去噪方法的去噪后图像均方误差比较
Tab 1 Denoising results(MSE) of 7 denoising methods

图像	σ	不同去噪方法的均方误差						
		Wiener	Visu-S	Sure-S	Bayes-S	Wiener-C	Wiener-S	Wiener-B
Lena	10	28.49	43.00	28.44	29.69	27.46	24.18	24.50
	20	81.98	87.48	59.26	61.47	58.33	51.93	53.22
	30	174.89	131.92	88.94	90.90	90.19	80.17	82.57
	60	672.49	249.55	168.19	169.13	176.74	154.47	156.18
Goldhill	10	43.00	72.92	42.42	42.03	49.37	38.33	38.04
	20	97.04	133.49	87.54	89.42	95.54	80.16	81.11
	30	189.97	183.75	125.93	126.67	135.84	117.20	118.46
	60	687.79	308.60	215.06	213.83	235.58	203.21	204.04
Boats	10	43.84	71.76	41.50	41.48	45.04	36.01	36.01
	20	98.34	140.34	88.80	90.82	94.51	79.09	79.66
	30	192.63	203.32	136.40	139.07	145.64	122.62	124.54
	60	696.32	353.61	251.97	253.56	270.64	236.75	238.56
Barbara	10	66.93	82.91	47.81	50.63	47.96	38.17	39.35
	20	135.24	192.74	118.23	120.17	128.01	101.27	103.55
	30	241.93	294.21	189.30	190.69	210.50	170.68	171.63
	60	766.15	466.47	354.49	359.69	372.33	335.67	348.95

方法和 Wiener-C 方法的变换矩阵 W_2 是使用 Daubechies symm let 8 个零矩小波, 而 Wiener-C 方法的变换矩阵 W_1 则是使用 Daubechies symm let 4 个零矩小波; 均方误差按式 (2) 计算, SureShrink 阈值按式 (3) 计算, BayesShrink 阈值按式 (4) 计算, 噪声方差按式 (5) 估计, Wiener-C 维纳滤波器按式 (7) 计算。

从表 1 可以看出, 当噪声标准差较大时, 线性降噪最优方法 Wiener 滤波的去噪结果相当坏, Visu-S 方法胜出了维纳方法。无论噪声级高低, Wiener 和 Visu-S 方法的去噪效果一致劣于其他 5 种方法, 而 Wiener-S 和 Wiener-B 方法的去噪效果都胜出了其他 5 种方法。在大多数情况下, Sure-S 和 Bayes-S 方法去噪效果优于 Wiener-C 方法, Sure-S 方法比 Bayes-S 方法的均方误差略低, 类似的结果也出现在 Wiener-S 和 Wiener-B 方法中。通过统计表 1 中均方误差的平均值发现, Wiener-S 方法较 Sure-S 方法, 均方误差降低了 9.2%; Wiener-B 方法较 Bayes-S 方法, 均方误差降低了 9.3%; Wiener-S 方法较 Wiener-C 方法, 均方误差降低了 15.3%; Wiener-B 方法较 Wiener-C 方法, 均方误差降低了 14.4%。

虽然, 大多数情况下, WienerChop 组合

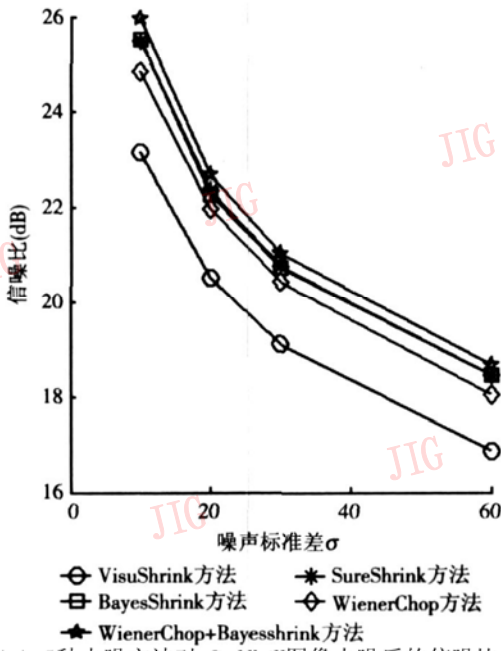
SureShrink 方法的均方误差略低于 WienerChop 组合 BayesShrink 方法, 但是, 笔者仍然推荐后者, 其原因是后者计算更简单, 计算效率更高。后者均方误差虽略高, 但可以认为属于计算中正常的波动范围。

下面以 Goldhill 图像为例, 根据表 1 中计算的均方误差, 分析除 Wiener 和 Wiener-S 方法以外的其他 5 种方法的去噪后图像的信噪比。信噪比的计算公式是

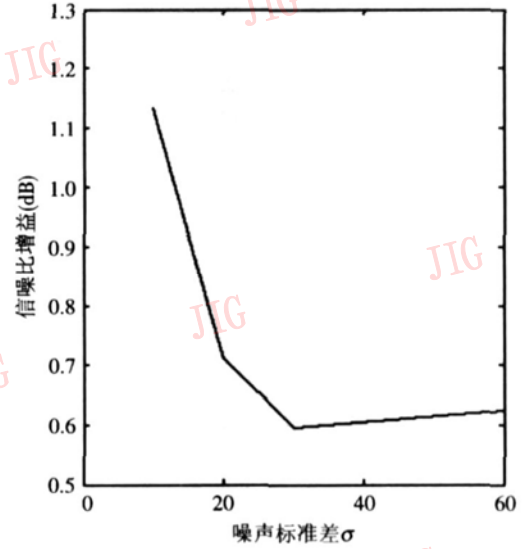
$$SNR = 10 \lg \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l X(i, j)^2}{MSE}$$

5 种方法去噪后图像的信噪比曲线如图 3 所示。

从左图可以看出, Sure-S 和 Bayes-S 方法信噪比曲线几乎重合, 这说明这两种方法去噪后图像的信噪比几乎是一样的。Wiener-C 方法去噪后图像的信噪比远高于 Visu-S 方法去噪后图像的信噪比, 但低于 Sure-S 和 Bayes-S 方法去噪后图像的信噪比, Wiener-B 方法去噪后图像的信噪比一致高于其他 4 种方法去噪后图像的信噪比。从右图可以看出, Wiener-B 方法较 Wiener-C 方法, 去噪后图像的信噪比大约提高了 0.6~1.15dB。这个分析同前面的结果是一致的。



(a) 5种去噪方法对 Goldhill图像去噪后的信噪比曲线



(b) Wiener-B较 Wiener-C方法对 Goldhill图像去噪后的信噪比增益曲线

图 3 Goldhill图像去噪后信噪比分析

Fig 3 SNR analysis of the denoised Goldhill

通常均方误差越低, 信噪比越高, 图像降噪效果越好, 去噪后的图像质量越高。众所周知, 均方误差和信噪比并不总是同人的视觉一致, 还需要配合视觉观察来判断降噪效果。下面以污染噪声标准差为 20 的 Barbara 图像为例, 观察 Wiener-C、Bayes-S 和 Wiener-B 3 种方法的降噪效果。由于完整图像的降噪细节很难分辨, 因此本文截取一个局部放大观察 (如图 4 所示)。Wiener-C 方法有最大的均方误差和最小的信噪比, 它虽较好地去除了噪声, 但其缺点是图像比较模糊, 这一点只要看

去噪后 Barbara 图像的围巾和嘴唇即可, Bayes-S 方法去噪后图像有中等的均方误差和信噪比值, 虽然它较好地保留了图像的细节, 但是残留了较多的噪声。Wiener-B 方法去噪后图像有最低的均方误差和最高的信噪比, 也确实具有最高的图像质量。它综合了 Wiener-C 和 Bayes-S 方法的优点, 一方面, 它比 Wiener-C 方法去噪后的图像清晰, 且保留了更多的图像细节, 另一方面, 它比 Bayes-S 方法去噪后的图像减少了恼人的噪声, 产生了最为愉悦的效果。



(a) Wiener-C 方法去噪图像 (MSE = 128.01, SNR = 21.96dB)

(b) Bayes-S 方法去噪图像 (MSE = 120.17, SNR = 22.25dB)

(c) Wiener-B 方法去噪图像 (MSE = 103.55, SNR = 22.67dB)

图 4 $\sigma = 20$ 的 Barbara 有噪图像降噪

Fig. 4 Denoising results for Barbara while $\sigma = 20$

5 结 论

本文分析了基于小波的去噪图像中高斯随机噪声的方法。实验表明,基于小波收缩或取阈值的非线性图像降噪方法,去噪性能远优于基于傅里叶变换的传统的线性的维纳降噪方法,虽然在线性降噪方法中后者是最优的。VisuShrink方法是采用全局的 universal 阈值,由于在小波分解的各个子带上采用相同的阈值,而且 universal 阈值又偏大,导致图像过度光滑,从而损失了较多的细节。SureShrink 和 BayesShrink 方法减少了 VisuShrink 方法的缺陷,由于它们均采用数据驱动的、子带依赖或自适应的阈值,因此较好地保留了图像的细节。在正交小波变换阈值的降噪方法中, SureShrink 和 BayesShrink 方法是最优的。尽管这两种降噪方法产生的均方误差和信噪比几乎相同,但是, BayesShrink 方法计算更简单、高效,虽然 WienerChop 方法也改进了 VisuShrink 方法的缺陷,但是,改进的思路与 SureShrink 和 BayesShrink 方法不同。它是先将 VisuShrink 方法作为真正信号的先导估计,然后创建小波域的维纳滤波器,最后通过维纳滤波的有效伸展,挽回了部分被 VisuShrink 方法去掉的信号系数,从而改进了降噪效果。

本文研究了 SureShrink 或 BayesShrink 与 WienerChop 组合的降噪方法,并推荐使用 BayesShrink 与 WienerChop 组合的降噪方法(即 Wiener-B)。它优于 SureShrink、BayesShrink 和 WienerChop 方法中任何一种方法,其去噪后的图像

具有最低的均方误差和最高的信噪比。Wiener-B 方法较 WienerChop 方法,均方误差平均降低了 14.4%。在具体的 Goldhill 降噪中, Wiener-B 方法较 WienerChop 方法,去噪后图像的信噪比大约提高了 0.6~1.15dB。更重要的是, Wiener-B 方法综合了 BayesShrink 和 WienerChop 两种方法的优点,较好地平衡了 WienerChop 方法使图像过于光滑和 BayesShrink 方法残留较多噪声的问题,而且获得了视觉上最为愉悦的降噪图像。

参考文献 (References)

- 1 Mallat S. A Wavelet Tour of Signal Processing (2nd edition) [M]. New York: Academic Press, 1999.
- 2 Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage [J]. *Biometrika* 1994, **81**(3): 425~455.
- 3 Donoho D L, Johnstone I M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage [J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1995, **90**(432): 1200~1224.
- 4 Chang S G, Yu B, Vetterli M. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression [J]. *IEEE Transactions on Image Processing* 2000, **9**(9): 1532~1546.
- 5 Fodor I K, Kamath C. Denoising through wavelet thresholding: an empirical study [J]. *SPIE Journal on Electronic Imaging* 2003, **12**(1): 151~160.
- 6 Ghael S P, Sayeed A M, Baraniuk R G. Improved wavelet denoising via empirical wiener filtering [A]. In: *Proceedings of SPIE Conference on Mathematical Imaging* [C], San Diego, CA, USA, 1997: 389~399.
- 7 Choi H, Baraniuk R. Analysis of wavelet-domain wiener filters [A]. In: *Proceedings of the IEEE-SP International Symposium on Time-frequency and Time-scale Analysis* [C], Pittsburgh, PA, USA, 1998: 613~616.